MÉTODO DE NEWTON

Inácio de Araujo Machado[1]
Ronaldo Ribeiro Alves[2]

RESUMO

Este trabalho teve por objetivo apresentar o método iterativo de Newton bastante importante por sua fácil aplicabilidade. O objetivo principal foi descrever o processo de dedução geométrica do mesmo e o desenvolvimento de seus algoritmos à partir de alguns exemplos. É apresentado também um breve histórico de seu surgimento e uma breve análise das condições de convergência de uma função.
Palavras-chave: Raízes. Equações. Diferenciação.

INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta uma breve síntese do estudo feito acerca do Método Iterativo de Newton com o intuito de instigar o leitor a querer pesquisar sobre o tema, uma vez que o mesmo é usado em quase todas as áreas da matemática aplicada a ponto de ser parte obrigatória do programa da disciplina de cálculo numérico.

Tal método é apreciado por conta de sua eficiência, simplicidade de desenvolvimento, velocidade de convergência e precisão na obtenção de raízes aproximadas.

Neste trabalho será abordado a ideia de seu surgimento e de como veio a consolidar-no processo de aprendizagem matemática ao que tange as técnicas de obtenção de raízes de equações não lineares por conta de sua eficiência na solução de problemas cotidianos nas diversas áreas de exatas.

Será apresentado, também, um breve histórico do método, sua definição, dedução e alguns problemas de aplicação do mesmo.

Portanto, é válido ressaltar que, o objetivo deste trabalho não é o de aprofundar nos estudos, uma vez que há hoje uma vasta bibliografia a seu respeito, mas sim dar uma visão geral acerca do mesmo.

Método iterativo

Um método iterativo é caracterizado pela repetição de determinado procedimento. Assim, iniciando-se o cálculo de determinada função a partir de um valor inicial x0 e

[1] Docente curso de Engenharia Ambiental - Faculdade Araguaia. e-mail: Inácio.araujo@gmail.com
[2] Docente Departamento de Matemática – UFSJ. e-mail: ronribal@ufsj.edu.br

repetindo-se o cálculo desta mesma função, sempre, com o resultado do valor obtido anteriormente fica evidenciado um caso clássico de iteração.

Do Novo Dicionário Aurélio – Século XXI, p.1146 temos: iteração – Processo de resolução (de uma equação, de um problema) mediante uma sequencia finita de operações em que o objeto de cada uma é o resultado da que a precede.

Este procedimento executado de forma correta dá a cada iteração um resultado mais preciso que o anterior.

É importante ressaltar que há determinados pontos que devem ser observados para que se possa trabalhar com um método iterativo: estimativa inicial, convergência e critério de parada.

O Método de Newton

Muito utilizado na determinação de raízes de equações não lineares, com grau maior que 2, o método de Newton possui extrema importância por conta de uma série de fatores dos quais dois são bastante relevantes: sua aplicabilidade e a simplicidade apresentada no desenvolvimento do seu algoritmo.

É válido salientar que ao trabalharmos com equações polinomiais de 1º e 2 grau tal método normalmente não é empregado uma vez que existem recursos mais simples como o isolamento de incógnitas ao desenvolvermos equações polinomiais de 1º grau e o método de Bháskara quando as equações envolvidas forem polinomiais de 2º grau, sendo elas, completas ou não.

É fundamental que se perceba que o Método de Newton não determina a solução exata da equação trabalhada e sim sua raiz aproximada, sendo importante reportar a afirmativa de que em alguns casos tal solução dá a aproximação necessitada do valor obtido.

Não se pode esquecer que para aplicar qualquer método numérico é necessário que se tenha uma ideia sobre a localização da raiz a ser determinada. Para isso, é importante ter conhecimento acerca da construção e análise – leitura e interpretação – de gráficos, uma vez que, tal localização pode ser obtida através dos mesmos.

Um adendo a história do método de Newton

O método de Newton, cujo o objetivo é estimar raízes de uma função, foi proposto por Isaac Newton em dois momentos: em 1669 em *De analysi per aequationes número* *terminorum infinitas* composta por ideias adquiridas em 1665-1666 sendo publicado apenas em 1711 e em *De metodis fluxionum et serierum infinitarum*, escrito em 1671 sendo aprimorado para qualquer tipo de função real em 1690 por Joseph Raphson. Daí sua popularidade como método de Newton-Raphson.

É válido salientar que, *a priori*, o mesmo não foi apresentado tal como é trabalhado hoje. A este fato foi extremamente importante a atuação de tantos outros grandes matemáticos como L. A. Cauchy, J.Fourier, Kantorovich, Fine e Bennet, entre outros, os quais contribuíram com o método provando que o mesmo convergia quadraticamente desde que o ponto inicial fosse tomado em uma vizinhança da solução procurada (Fourier), que o mesmo se extende para funções de várias variáveis e que pode ser utilizado para se provar a existência de raízes de outras equações (Cauchy).

Definição do Método de Newton

O Método Iterativo de Newton consiste em uma sequência de cálculos da tangente do ângulo formado entre uma reta tangente a curva $f(x)$ em um ponto inicial x_0 (vizinhança da raiz) e o eixo das abscissas, que por sua vez dará um novo ponto x_1, ao qual definirá uma nova reta tangente que por sua vez propiciará um novo ponto x_2 e assim sucessivamente.

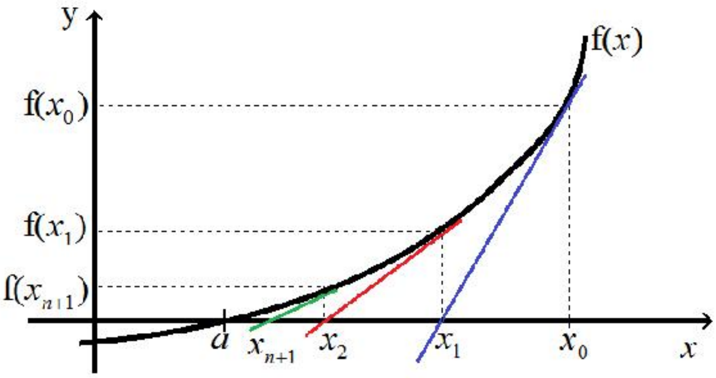


Figura 1: Curva $f(x)$ e retas tangentes

$$tg^{-} = f'(x_n) = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}} = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} \rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Portanto, a ideia do Método Iterativo de Newton nada mais é que a linearização de uma função derivável $f(x)$ a qual para resolvermos a equação $f(x) = 0$ a partir de uma aproximação inicial x_0 iremos construir uma aproximação linear de $f(x)$ em uma vizinhança x_0.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Dedução do Método de Newton

O Método de Newton é utilizado na solução de problemas do tipo:

Dada a função $f(x) = 0$, como encontrar um valor para x tal que quando esse valor for substituído na função nos indique o zero desta mesma função?

Existem várias maneiras de deduzirmos tal método, para isso, com a intenção de chegarmos a equação de Newton-Raphson utilizaremos argumentos geométricos.

Para tanto, tomemos a função $f(x)$ cujo parte do seu gráfico está representado abaixo:

Figura 2: Curva $f(x)$

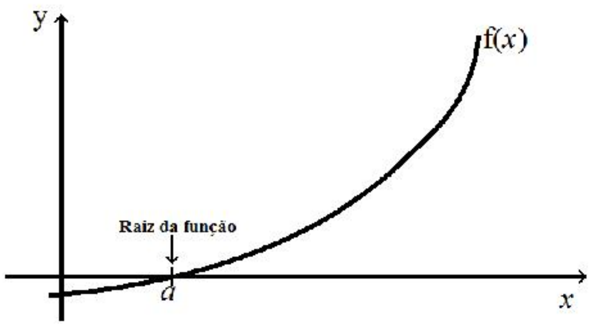


Figura 3: Raiz da função $f(x)$

Como pretendemos buscar uma de suas raízes, uma das maneiras para entendermos o Método de Newton-Raphson dar-se-á inicialmente com a escolha de uma estimativa chamada x índice zero (x_0) para a raiz, conforme a figura abaixo

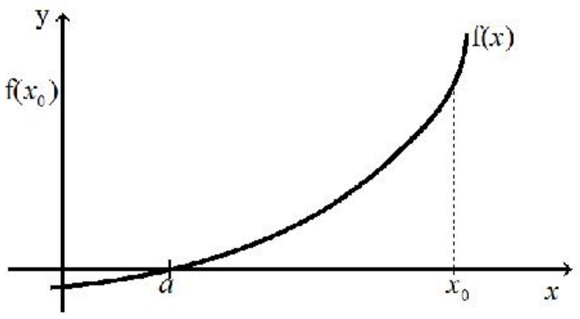


Figura 4: Índice zero$\left(x_0\right)$

O passo seguinte será traçar a reta tangente à curva $\mathrm{f}(x)$ em x_0.

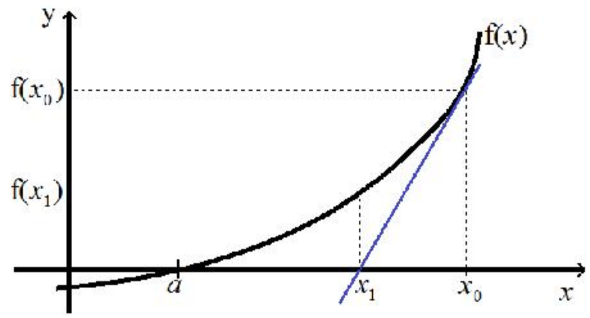


Figura 5: Reta tangente que corta o índice x_1

Com isso a reta tangente cortará o eixo x em um novo ponto x índice 1 (x_1) ao qual ainda não conhecemos seu valor.

Chegamos aí num próximo problema a ser questionado: como encontrar a próxima aproximação para x partindo do ponto x_0, no caso, como determinar o valor de x_1?

Para solucionarmos tal problema é necessário observarmos o ângulo ¯ formado entre a reta tangente obtida e o eixo das abscissas.

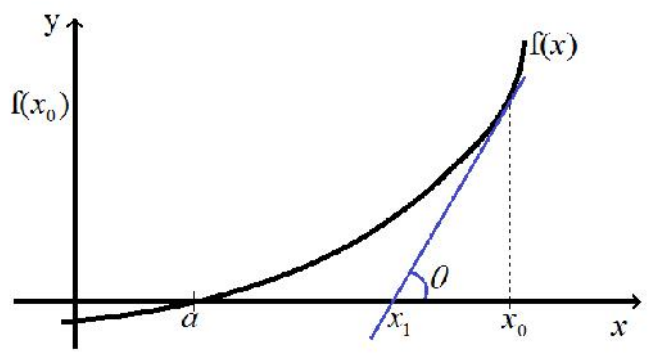


Figura 6: Ângulo ¯ de inclinação da reta tangente

Então se calcularmos a tangente deste ângulo ¯ , teremos que

$$tg¯ = \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - x_1} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo ~}}{\text{cateto adjacente ao ângulo ~}}, \text{ o que nos dá } tg¯ = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)}. \qquad (\text{ I })$$

Do cálculo temos que a $tg¯$ é a derivada da função $f(x_0)$, portanto podemos afirmar que $tg¯ = f'(x_0)$ onde se compararmos com (I) obteremos $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)}$.

Com o intuito de isolarmos x_1 faremos a manipulação algébrica abaixo:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)}$$

$$f'(x_0) \cdot (x_0 - x_1) = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)} \cdot (x_0 - x_1)$$

$$f'(x_0) \cdot (x_0 - x_1) = f(x_0)$$

$$f'(x_0) \cdot (x_0 - x_1) \cdot \frac{1}{f'(x_0)} = f(x_0) \cdot \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$-x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - x_0 \cdot (-1)$$

$$x_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Concluímos, então, que o valor de x_1 será dado pela relação $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Surge, assim, um novo problema: Como obter uma nova aproximação desta raiz que esteja no intervalo entre ela e o valor $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ obtido?

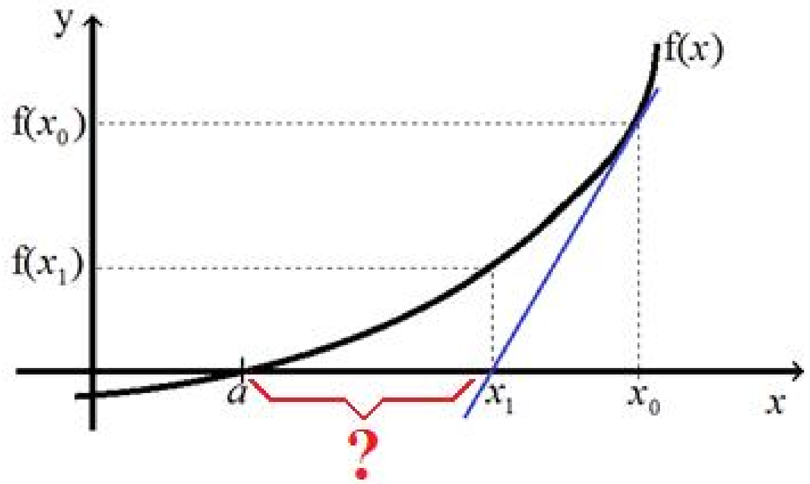


Figura 7: Aproximação entre a raiz da função e o índice x_1

O procedimento para responder a este questionamento dar-se-á de forma análoga ao procedimento executado anteriormente.

Desta forma será necessário traçarmos uma próxima reta tangente à curva $f(x)$ em x_1 que por sua vez cortará o eixo das abscissas em um novo ponto x índice 2 (x_2).

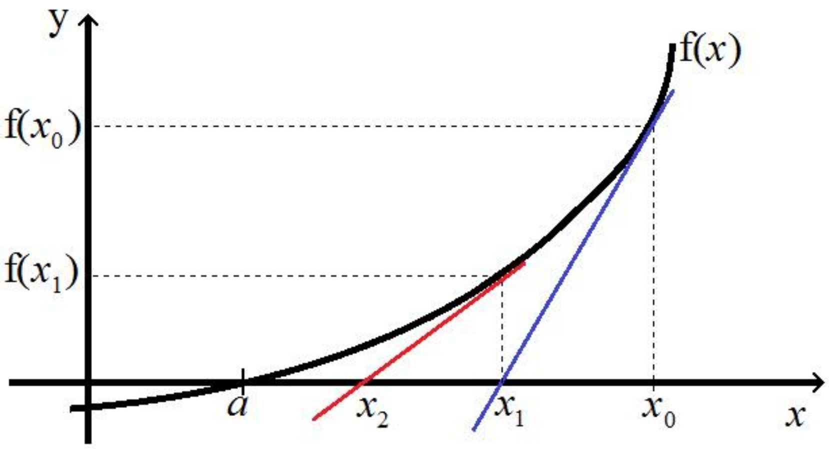


Figura 8: Reta tangente que corta o índice x_2

Isto fará com que repitamos o procedimento anterior só que desta vez com o objetivo de determinarmos o valor de x_2. Assim, deveremos calcular a tangente do ângulo formado entre a reta tangente à curva $f(x)$ em x_1 e o eixo das abscissas.

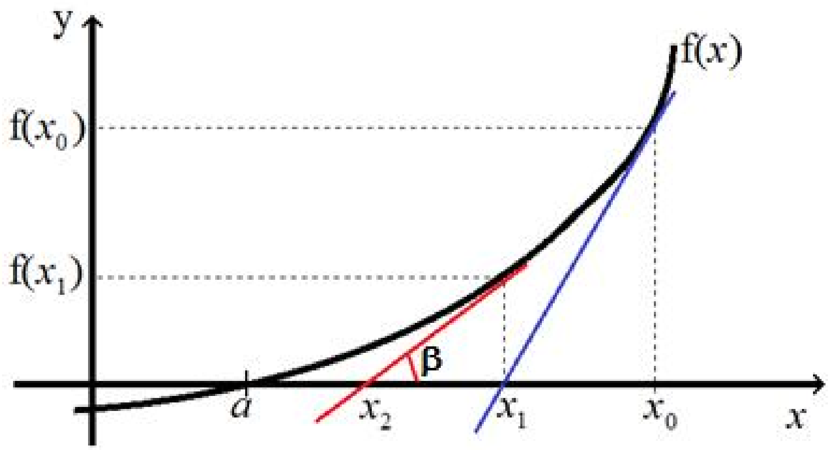


Figura 9: Ângulo de inclinação da reta tangente

Então, $tg \quad = \dfrac{f(x_1) - 0}{x_1 - x_2}$, o que nos dá $tg \quad = \dfrac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)}\cdot$ (I)

Do cálculo temos que a tg é a derivada da função $f(x_1)$, portanto podemos afirmar que $tg = f'(x_1)$ onde se compararmos com (I) obteremos $f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)}$.

Com o intuito de isolarmos x_2 faremos a manipulação algébrica abaixo:

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)}$$

$$f'(x_1) \cdot (x_1 - x_2) = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)} \cdot (x_1 - x_2)$$

$$f'(x_1) \cdot (x_1 - x_2) = f(x_1)$$

$$f'(x_1) \cdot (x_1 - x_2) \cdot \frac{1}{f'(x_1)} = f(x_1) \cdot \frac{1}{f'(x_1)}$$

$$x_1 - x_2 = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$-x_2 = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} - x_1 \cdot (-1)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Concluímos, então, que o valor de x_2 será dado pela relação $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

Desta forma, repetindo o procedimento quantas vezes forem necessárias, uma vez que trata-se de um método iterativo, chegaremos a um gráfico conforme sucessão de imagens que se seguem:

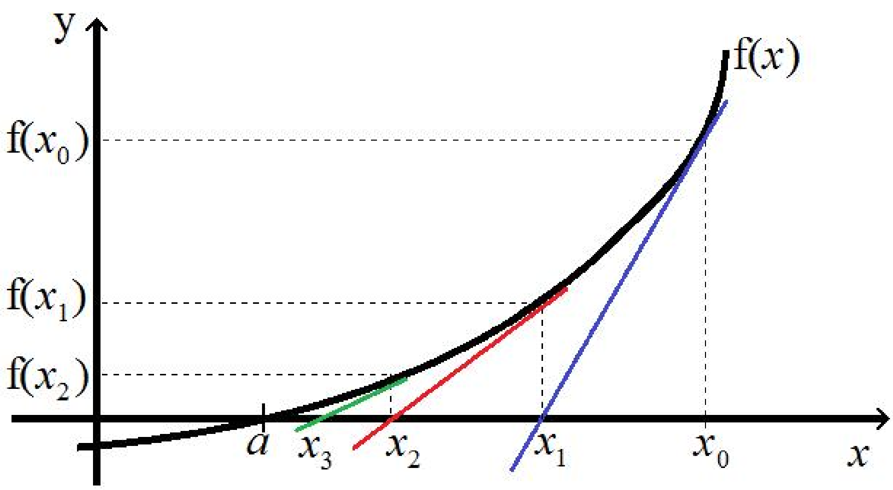


Figura 10: Reta tangente que corta o índice x_3

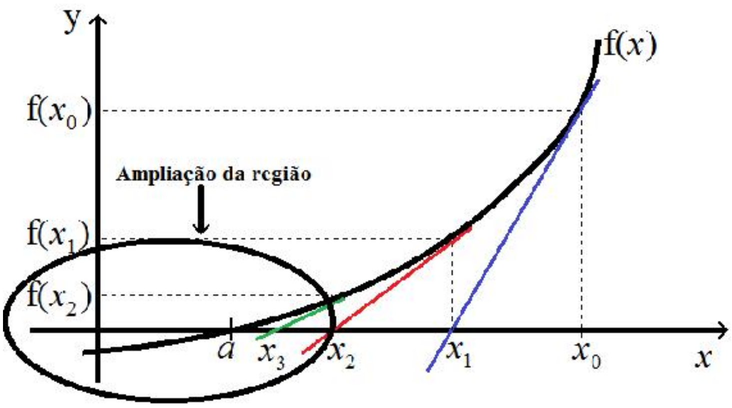


Figura 11: Ampliação da curva $f(x)$, da reta tangente que corta o índice x_3 e da raiz da função

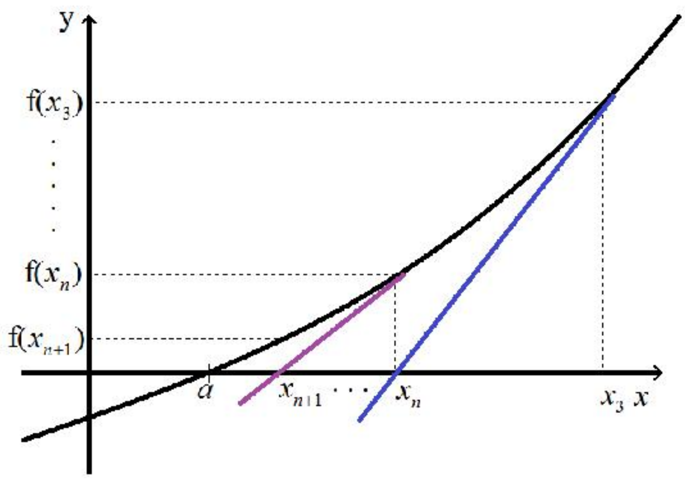


Figura 12: Iteração de retas tangentes que cortam $n+1$ índices

Onde ao repetirmos o procedimento uma e mais uma, e mais uma vez concluiremos que a aproximação posterior será dada a partir da mesma relação anterior:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

$$x_3 = x_2 - \frac{\mathrm{f}(x_2)}{\mathrm{f}\,'(x_2)}.$$

$$x_4 = x_3 - \frac{\mathrm{f}(x_3)}{\mathrm{f}\,'(x_3)}.$$

$$x_5 = x_4 - \frac{\mathrm{f}(x_4)}{\mathrm{f}\,'(x_4)}.$$

$$\vdots$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\mathrm{f}(x_n)}{\mathrm{f}\,'(x_n)}.$$

O que nos faz chegarmos a dedução do Método de Newton.

É relativamente importante elucidar que devido à sua interpretação geométrica o método de Newton é também conhecido por Método das Tangentes.

Analisando analiticamente, da figura

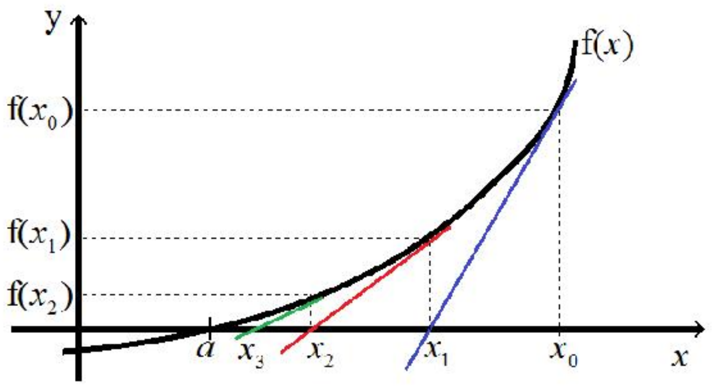


Figura 13: Inclinação da reta r

temos que a inclinação da reta *r* que corta o eixo *x* em x_1 é dada por $tg^{-} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$ de onde concluímos:

$$tg^{-} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \quad \leftrightarrow \quad f\,'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \quad \leftrightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f\,'(x_0)}$$

Daí, concluímos que:

- ✓ $|x_1 - x_0| \leq erro$, então x_1 é a raiz desejada;
- ✓ Caso x_1 não seja tal raiz é necessário determinarmos x_2 utilizando o procedimento análogo $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f\,'(x_1)}$.
- ✓ Se $|x_2 - x_1| \leq erro$, então x_2 é a raiz desejada;

- ✓ Caso x_2 não seja tal raiz é necessário determinarmos x_3 utilizando o procedimento análogo $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$.
- ✓ E assim prosseguimos, calculando $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ até determinarmos $|x_n - x_{n-1}| \leq erro$ ao qual será a raiz aproximada de $f(x)$.

Dá expressão $|x_n - x_{n-1}| \leq erro$ afirmamos que tal procedimento será considerado o "critério de parada" no algoritmo $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$.

Condições de Convergência

Para haver convergência no método de Newton é necessário que o intervalo (a, b), analisado, seja suficientemente pequeno e contenha uma raiz apenas sendo necessário observar que:

I) Se $f(a).f(b)$ for positivo -$\left(f(a).f(b) > 0\right)$ ou existirá um número par de raízes reais (contando suas multiplicidades) ou não existirá nenhuma raiz real no intervalo (a, b);

II) Se $f(a).f(b)$ for negativo -$\left(f(a).f(b) < 0\right)$ existirá um número ímpar de raízes reais (contando suas multiplicidades) no intervalo (a, b);

III) Se $f'(a).f'(b)$ for positivo - $\left(f'(a).f'(b) > 0\right)$ então, no intervalo especificado (a, b), a função ou será apenas crescente ou será apenas decrescente jamais se alternando;

IV) Se $f'(a).f'(b)$ for negativo - $\left(f'(a).f'(b) < 0\right)$ então, no intervalo especificado (a, b), a função se alternará entre crescente e decrescente;

V) Se $f''(a).f''(b)$ for positivo - $\left(f''(a).f''(b) > 0\right)$, então a concavidade da função no intervalo (a, b) especificado não se inverterá;

VI) Se $f''(a).f''(b)$ for negativo - $\left(f''(a).f''(b) < 0\right)$, então a concavidade da função no intervalo (a, b) especificado se inverterá.

Sendo assim, a partir dos análise dos critérios acima pontuados fica evidente que para haver convergência à uma raiz determinada no intervalo (a,b) obrigatoriamente:

$$f(a).f(b) < 0, \quad f'(a).f'(b) > 0 \quad \text{e} \quad f''(a).f''(b) < 0$$

Exemplos

I) Determine, usando o método de Newton, a menor raiz positiva da equação $2\cos x - e^x = 0$, com erro inferior a 10^{-2}.

O primeiro passo necessário para resolvermos tal situação parte da obtenção de um valor inicial para inserirmos no algoritmo. Para isso o método gráfico é bem prático. Assim é necessário dividirmos a equação $2\cos x - e^x = 0$ em outras duas equações mais simples: $y_1 = 2\cos x$ e $y_2 = e^x$. Colocando-as no mesmo gráfico obteremos:

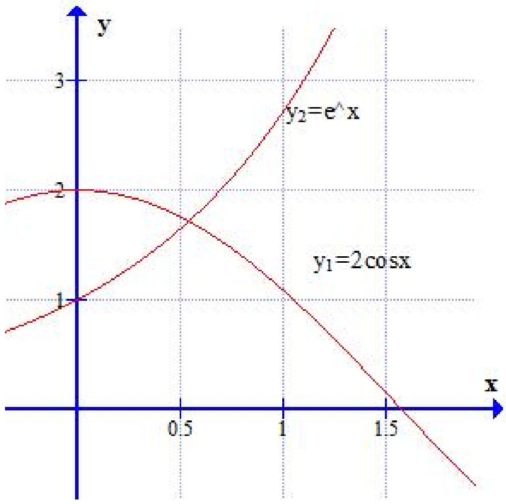


Figura 14: Curvas de y_1 e y_2

O que nos faz concluirmos que a intersecção (x, y) é solução da função $2\cos x - e^x = 0$. Como x está na vizinhança de 1, tomaremos $x_0 = 1$.

Método Iterativo de Newton-Raphson					
n	$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x)}{f'(x_n)}$	$f(x)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x)}{f'(x_n)}$	ERRO RELATIVO $\left\lvert \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right\rvert$
		$f(x) = 2\cos x - e^x$	$f(x) = -2senx - e^x$		
0	1	-0,718586	-2,753186	0,261001	0,353 > 10^{-2}
1	0,738999	-0,094004	-2,119633	0,044349	0,063 > 10^{-2}
2	0,694650	-0,003154	-2,027255	0,001555	0,002
3	0,693095				

Ou seja, a aproximação $x_3 = 0,693095$ possui duas casas decimais corretas.

Logo, a menor raiz positiva da equação 4cos x − e^x = 0, com $\pounds < 0{,}01$ é x = 0,693095.

II) Determine a menor raiz real positiva da equação $f(x) = x^3 - 2x - 1 = 0$ com erro inferior a 10^{-3}.

a) É evidente que há uma raiz no intervalo]1;2[uma vez que $f(0) = -1 < 0,\ f(1) = -2 < 0$ e $f(2) = 3 > 0$.

b) $f'(x) = 3x^2 - 2$ é diferente de zero naquele intervalo, já que se anula para

$$3x^2 - 2 = 0$$
$$3x^2 = 2$$
$$x^2 = \frac{2}{3}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$

c) $f''(x) = 6x > 0$ em todo o intervalo.

d) Então, para decidirmos o x_0 a ser tomado é necessário aplicarmos os extremos do intervalo]1; 2[no produto $f(x).f''(x) > 0$.

Assim, $f(1).f''(1) = -12 < 0$ e $f(2).f''(2) > 0$ portanto, $x_0 = 2$ é o valor ideal para iniciarmos o processo iterativo já que fica verificado as condições de convergência da função.

e) Podemos fazer as iterações utilizando o seguinte quadro:

Método Iterativo de Newton-Raphson					
n	$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x)}{f'(x_n)}$	$f(x)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x)}{f'(x_n)}$	ERRO RELATIVO $\left\|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n}\right\|$
		$f(x) = x^3 - 2x - 1$	$f(x) = 3x^2 - 2$		
0	2,000000	3,000000	10,000000	0,300000	0,176470 > 10^{-4}
1	1,700000	0,513000	6,670000	0,076911	0,047385>10^{-4}
2	1,623089	0,029716	5,903253	0,005033	0,003110>10^{-4}
3	1,618056	0,000128	5,854315	0,000021	0,000012<10^{-4}
4	1,618035				

Ou seja, a aproximação x_4 = 1,618035 possui quatro casas decimais corretas.

Logo, a menor raiz positiva da equação 4cos x − e^x = 0, com $\pounds < 0{,}00001$ é x = 1,618035.

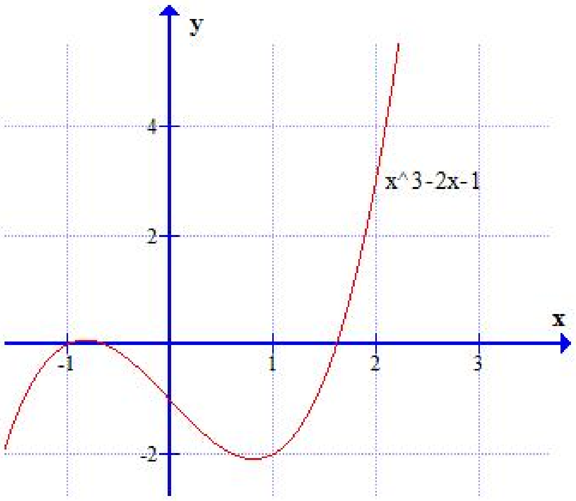
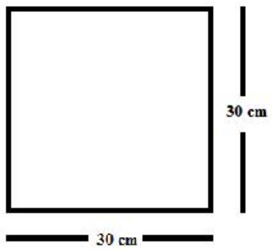


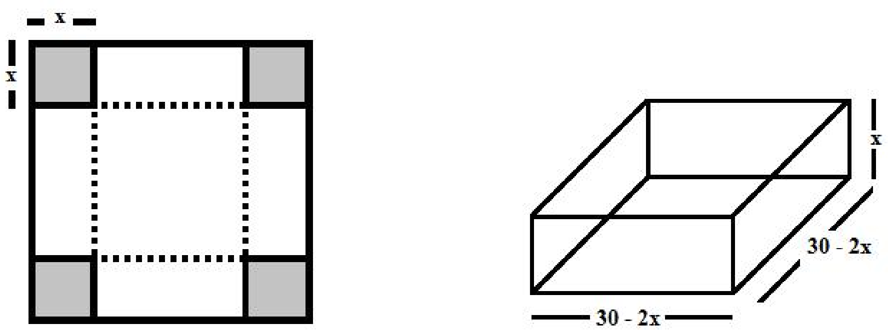
Figura 15: Gráfico da função polinomial $x^{\wedge 3} - 2x - 1$ no intervalo $]-2;3[$

Situação prática

I – Seja uma chapa metálica de 30cm x 30 cm.



Se cortarmos um quadrado de lado x em cada um dos cantos desta chapa e vincarmos as abas que sobraram obteremos uma caixa sem a tampa conforme a figura a seguir.



Observe que se efetuarmos o produto das três dimensões da caixa $(30-2x)(30-2x)x$, obteremos:

$$(30-2x)(30-2x)x=$$
$$(900-120x+4x^2)x=$$
$$4x^3-120x^2+900x$$

Sabendo que o volume dessa caixa corresponde a aproximadamente 1507,102031 cm^3 podemos utilizar o método de Newton para determinarmos o valor da altura *x* da caixa com erro inferior a 10^{-3}.

$$4x^3-120x^2+900x=1507{,}102031$$
$$4x^3-120x^2+900x-1507{,}102031=0$$

a) Substituindo a função por 1, 2, 3, 4, ... fica evidente que há uma raiz no intervalo]8;9[uma vez que $f(8)\approx 60{,}89>0$ e $f(9)\approx -211{,}10<0$.

b) $f'(x)=12x^2-240x+900$ é diferente de zero naquele intervalo, já que se anula para

$$12x^2-240x+900=0$$
$$x=\frac{240\pm\sqrt{57600-43200}}{24}=\frac{240\pm\sqrt{14400}}{24}=\frac{240\pm 120}{24}$$
$$\begin{cases} x'=15 \\ x''=5 \end{cases}$$

c) $f''(x)=24x-240<0$ em todo o intervalo.

d) Então, para decidirmos o x_0 a ser tomado é necessário aplicarmos os extremos do intervalo]8; 9[no produto $f(x).f''(x)>0$.

Assim, $f(8).f''(8)=-2922{,}72<0$ e $f(9).f''(9)=5066{,}4>0$ portanto, $x_0=9$ é o valor ideal para iniciarmos o processo iterativo já que fica verificado as condições de convergência da função.

e) Podemos fazer as iterações utilizando o seguinte quadro:

Método Iterativo de Newton-Raphson					
n	$x_n=x_{n-1}-\dfrac{f(x)}{f'(x_n)}$	$f(x)$	$f'(x_n)$	$\dfrac{f(x)}{f'(x_n)}$	ERRO RELATIVO $\left\lvert\dfrac{x_n-x_{n-1}}{x_n}\right\rvert$
0	9,00000	-211,102031	-288	0,732993163	0,088664 > 10^{-3}

1	8,267006837	-8,022635048	-263,9608164	0,030407355	$0,0003691 < 10^{-3}$
2	8,236599482				

Ou seja, a aproximação x_2 = 8,23659 possui quatro casas decimais corretas.

Logo, a menor raiz positiva da equação $f(x) = 4x^3 - 120x^2 + 900x - 1507{,}102031$ com £ $< 0{,}0001$ é x_2 = 8,23659 .

Considerações finais

O Método de Newton é utilizado em problemas que buscam determinar a raiz real ~ especificada em um intervalo (a, b) de uma equação $f(x) = 0$,onde f obrigatoriamente deverá ser uma função contínua e diferenciável neste intervalo. Este método é extremamente prático e rápido na obtenção de tal raiz sendo válido ressaltar que a mesma é uma raiz aproximada do que se pretende obter.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARPENTIER, Michel P.J. **Análise Numérica.** Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico - U. T. L**.,** 1993.

CUMINATO, José Alberto. **Cálculo Numérico.** ICMC/USP.

GALVÃO, Lauro César. NUNES, Luiz Fernando. **Cálculo Numérico.** Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR. Material Didático.

MOREIRA, Fernando Ricardo. **Uma discussão sobre o método de Newton.** Revista Eletrônica de Matemática – REMat. ISSN 2177-5095. N° 2 – 2010.

SPERANDIO, Décio. MENDES, João Teixeira. SILVA, Luiz Henrique Monken. **Cálculo Numérico: Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos.** Pearson Education. São Paulo, 2003.

Recebido em 12 de março de 2013.
Aprovado em 26 de março de 2013.