

# APLICAÇÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA MINIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Wanderlei Malaquias Pereira Junior<sup>1</sup>  
André Carlos da Silva<sup>1</sup>

## RESUMO

O presente trabalho trata-se de uma exposição dos métodos numéricos estudados na disciplina de Métodos Computacionais em Ciência e Tecnologia juntamente com a sua aplicação. Três métodos numéricos para solucionar raízes de equações (Método da Bisseção, Método da Falsa Posição e Método de Newton-Raphson) são implementados conjuntamente com um método de otimização irrestrito de 1º ordem, com o objetivo de verificar a velocidade de convergência dos mesmos.

**Palavras-chaves:** Otimização, raízes de funções, método de Newton, método da Bisseção.

## APPLICATION OF NUMERICAL METHODS FOR MINIMIZING FUNCTIONS OF VARIOUS VARIABLES

### ABSTRACT

This work it is a statement of the numerical methods studied in the discipline of Computational Methods in Science and Technology along with your application. Three numerical methods for solving equations roots (Bisection Method, Method False Position and Newton- Raphson method) are implemented in conjunction with an unrestricted optimization method of 1st order, in order to verify the convergence speed of the same.

**Keywords:** Optimization, function roots, Newton's method, the bisection method.

---

<sup>1</sup> Professor, Universidade Federal de Goiás, Catalão

## INTRODUÇÃO

Os métodos de otimização são amplamente empregados na solução de problemas reais de engenharia de forma a tornar sua aplicação bastante interessante. Porém a solução analítica de problema de otimização é bastante complicada quando a função objetivo torna-se muito complexa e com inúmeras variáveis de projeto, sendo que uma solução numérica é requerida para esses problemas.

A otimização trata-se basicamente de um problema de maximização ou minimização de uma função qualquer, sendo que essa função pode ter sua solução restrita em um domínio ou não, classificando o problema em dois gêneros básicos de funções: (a) otimização irrestrita; (b) restrita. No caso desse trabalho são tratados problemas de otimização irrestrita.

Basicamente a diferença entre os dois gêneros é de que a otimização restrita delimita as soluções do problema em uma área denominada região factível, já o problema irrestrito não delimita as soluções da função em regiões específicas.

Em uma abordagem clássica para solução de funções restritas métodos de otimização clássica sempre são requeridos para solução do problema geral de otimização, tornando-os de extrema importância.

De maneira geral encontrar analiticamente pontos de mínimos ou máximos de funções é uma tarefa complexa seja para funções restritas ou irrestritas. De maneira geral o problema de otimização clássico para casos reais de engenharia é sempre envolvido pela transformação de uma função restrita para uma função adaptada irrestrita, chamada função pseudo objetivo. Portanto a utilização de métodos irrestritos é de extrema importância para a solução de qualquer problema de otimização, tornando a viável o estudo proposto nesse trabalho.

O objetivo dessa pesquisa é implementar um método de otimização de 1º e 2º ordem irrestrito em conjunto com os métodos numéricos da Bisseção, Newton Raphson e Falsa Posição para determinar o valor das variáveis de projeto que minimizam as funções apresentadas na metodologia.

## FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### *Problema geral de otimização*

Segundo a referência [1] o problema geral de otimização é dado por alguns itens como:

- a) Função Objetivo: Função de uma ou mais variáveis de projeto a qual se deseja minimizar;
- b) Variáveis de projeto: Variáveis que serão identificadas durante o processo e que minimizam a função;
- c) Restrições: Funções auxiliares que limitam o espaço viável do projeto;
- d) Espaço viável de projeto: Região do domínio da função onde estão as variáveis de projeto que minimizam a função e respeitam as restrições.

Matematicamente o problema geral de otimização pode ser descrito pelo conjunto de equações apresentados abaixo (Eq. 1 a Eq. 5):

$$\text{Minimize } f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

Restrições de igualdade

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (2)$$

Restrições de desigualdade

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad (3)$$

Restrições laterais

$$X_i \leq X \leq X_j \quad (4)$$

Variáveis de projeto

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Como o processo de otimização trata-se de um método numérico a solução geral é tratada como um processo iterativo, onde o intuito é encontrar o valor de  $X$  que minimiza a

função objetivo também chamada em algumas bibliografias de FO. Portanto pode-se escrever as variáveis de projeto através de uma equação genérica iterativa dada na equação (6).

$$X^{K+1} = X^K + \alpha.S \quad (6)$$

Onde:

$X^{K+1}$  -Variável de projeto atualizada

$\alpha$  -Passo de cada iteração

$S$  -Direção de busca

O valor de passo e da direção de busca é reavaliado em cada processo iterativo.

A diferenciação dos métodos de otimização está na variável  $S$  do problema, pois cada processo admite um tipo diferente de direção de busca.

Simplificadamente existem 3 tipos básicos de otimização irrestrita.

- Métodos de ordem zero;
- Métodos de primeira ordem;
- Métodos de segunda ordem;

Segundo a referência [2] são usados quando o valor da função é obtido com precisão pobre, e, portanto, os valores das derivadas (ou gradientes) não são confiáveis e não devem ser utilizados. São exemplos desses métodos:

- Direções conjugadas de Powell;
- Seção Áurea;
- Série de Fibonacci.

Já os métodos de primeira ordem são aqueles que utilizam informações das derivadas para montar a direção de busca do problema, nesse caso utilizam a informação da primeira derivada da função. Portanto para um problema de  $n$  variáveis utiliza-se da informação do gradiente da função. No caso desse artigo foi testado um dos métodos de 1º ordem mais antigos que é o de máxima descida ou também chamado de *Steepest Descent*.

### Máxima Descida ou *Steepest Descent*

O método da máxima descida é baseado na acumulação das informações da primeira derivada da função objetivo. Para atender as condições necessárias de um problema de otimização a referência [3] cita que o  $\nabla f = 0$ .

De acordo com a referência [4] a máxima descida é um processo iterativo que a cada etapa faz uma busca na direção oposta ao vetor gradiente da função objetivo no ponto corrente”. A escolha dessa direção se justifica pelo fato de que o gradiente da função objetivo avaliado em um ponto  $x$  aponta para a direção de maior crescimento de  $f$  a partir desse ponto, conforme discutido nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. Sendo assim, a direção oposta ao vetor gradiente é a que fornece um maior decréscimo na função objetivo. Para maior esclarecimento a equação (7) apresenta a direção de busca para o método da máxima descida

$$S = -\nabla f \quad (7)$$

O algoritmo da máxima descida é dado pela substituição da equação (7) na equação (6).

### *Método de Newton*

O método de Newton é um método de 2º ordem que tem como referência a utilização de informações da segunda derivada de uma função, que no caso de problemas de várias variáveis é a matriz Hessiana dada pela equação (8).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Segundo a referência [5] o método de Newton traz uma aproximação quadrática do vetor de busca  $S$ . Além disso a matriz Hessiana ser positiva e definida, fato que é muito importante pois ela garante que o modelo apresente funções contínuas na segunda derivada.

Essa matriz é positiva e definida quando todos seus autovalores são maiores do que zero conforme equação (9).

$$\det \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (9)$$

Se  $\lambda > 0$  – Hessiana positiva e definida

A direção de busca pelo método de Newton é mostrada conforme a equação (10) apresentada logo abaixo:

$$S = -H^{-1} \cdot \nabla f \quad (10)$$

Onde:

$H^{-1}$  – Inversa da matriz Hessiana

Esse método apresenta uma boa convergência em relação a máxima descida, porém em problemas onde existem certas dificuldades em relação ao cálculo das derivadas, métodos Quasi-Newton são recomendados, pois eles se utilizam de processos numéricos para determinação da matriz Hessiana, são exemplos desses métodos:

- Método de Davidon Fletcher Reves (DFP);
- Método de Broyden Fletcher Goldfarb Shano (BFGS).

#### *Mecânica do dano versus mecânica da fratura*

É importante lembrar que há diferenças entre a Mecânica do Dano e a Mecânica da Fratura. Enquanto a Mecânica do Dano leva em consideração a resposta não-linear do material carregado e o processo de microdefeitos continuamente distribuídos que se desenvolvem antes da formação de fissuras discretas, a mecânica da fratura lida com o comportamento do material e efeitos da propagação de uma fissura à níveis macroscópicos, usando métodos analíticos para calcular as forças atuantes nas trincas e calcular a resistência do material a fratura. Para o concreto a mecânica da fratura pode ser utilizada para dimensionar projetos estruturais, verificando como o tamanho do elemento estrutural influencia a capacidade de carga do mesmo. Já a Mecânica do Dano analisa e descreve o material danificado a partir do processo de microfissuração e sua evolução. A Figura 2 ilustra a diferença dos métodos.

## Métodos numéricos para determinação de raízes de funções unidimensionais

De acordo com a referência [6] nas mais diversas áreas das ciências exatas ocorrem, frequentemente, situações que envolvem a resolução de uma equação do tipo  $f(x)=0$ . Verifiquemos um exemplo na área da Engenharia Civil.

Para determinar a posição da linha neutra em uma peça retangular de concreto armado é necessário encontrar o valor de  $x$  (linha neutra) para a seguinte equação (11).

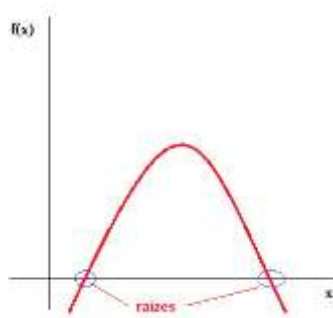
$$M_d = 0,68.b_w.f_{cd}.x.(d - 0,40.x) = 0 \quad (11)$$

Portanto para o problema citado acima é necessário descobrir qual a posição da linha neutra que zera o valor do momento fletor de cálculo da seção transversal.

Logo o objetivo desse capítulo é verificar métodos numéricos para encontrar zeros de funções.

Numericamente todo método deve apresentar um intervalo fixo onde pretende-se determinar a raiz. Sendo que o zero ou a raiz de uma função é dado pelas abcissas dos pontos onde a curva intercepta o eixo  $Ox$ . Graficamente isso é observado na Figura 1.

**Figura 1-Função  $f(x)$  unidimensional e suas raízes**



**Fonte: Próprio Autor**

Portanto é necessário sempre identificar o intervalo que contenha a raiz da função e o método consiste no refinamento desse intervalo até que a raiz seja identificada através da convergência do processo numérico.

Para esse intervalo  $[a, b]$  é necessário atender o teorema de verificação de uma possível raiz no intervalo. O teorema é dado pela equação (12).

$$f(a).f(b) < 0 \quad (12)$$

Segundo a referência [6] e [7] satisfeita a condição do teorema acima e supondo que  $f$  e  $f'$  sejam contínuas em  $[a, b]$  e que o sinal de  $f'$  seja constante neste intervalo tem-se existe um único ponto  $x = \xi$  entre  $[a, b]$  que é zero de  $f(x)$ .

Geralmente na fase de refinamento o critério de parada do método é dado pela comparação apresentada na equação (13).

$$|f(\xi)| < \varepsilon \quad (13)$$

Onde:

$\varepsilon$  - Tolerância para convergência

Em geral a tolerância é um número muito pequeno para que o valor dado na equação (13) se aproxime de zero.

Nos itens a seguir são apresentados os três métodos numéricos para determinação de raízes de uma função unidimensional, são eles: (a) Método da Bisseção; (b) Método da Falsa Posição; (c) Método de Newton Raphson.

#### *Método da Bisseção e da Falsa Posição*

Segundo a referência [7] estes métodos são os mais intuitivos geometricamente, mas são os que convergem mais lentamente. Para aplicá-los é preciso ter um intervalo  $[a, b]$  onde a função  $f(x)$  troca de sinal. Parte-se o intervalo em dois subintervalos e verifica-se qual dos dois contém a raiz desejada. Toma-se este intervalo e repete-se o processo em subintervalos menores até que seja conveniente parar o processo (o que é definido por um critério de parada adequado).

O processo de refinamento pelo método da Bisseção e pelo método da Falsa Posição não depende de informações das derivadas da função, diferentemente do método de Newton-



Raphson que utiliza informações das derivadas da função. A seguir são apresentados os métodos da Bisseção e Falsa Posição.

#### *Método da Bisseção*

O objetivo do método da bisseção é reduzir o intervalo de incerteza  $[a, b]$  até que a convergência seja obtida. De maneira geral o método consiste em reduzir o intervalo em divisões sucessivas apresentadas pelo critério dado na equação (14).

$$x_{k+1} = \frac{b_k + a_k}{2} \quad (14)$$

É possível visualizar que o intervalo é reduzido sempre o resultado de uma média aritmética, ou seja, o intervalo é sempre dividido ao meio. Para avaliar o valor de  $[a_k, b_k]$  deve-se utilizar o critério da equação (15) a (16). O equacionamento é apresentado pela referência [8].

$$x_0 = \frac{b_0 + a_0}{2} \Rightarrow \begin{cases} f(a_0) < 0 \\ f(b_0) < 0 \\ f(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi \in (a_0, x_0) \\ a_1 = a_0 \\ b_1 = x_0 \end{cases} \quad (15)$$

$$x_1 = \frac{b_1 + a_1}{2} \Rightarrow \begin{cases} f(a_1) < 0 \\ f(b_1) > 0 \\ f(x_1) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi \in (x_1, b_1) \\ a_2 = x_1 \\ b_2 = b_1 \end{cases} \quad (16)$$

Como esse método consiste na redução de um intervalo é possível admitir aqui outro critério de parada conforme equação (17).

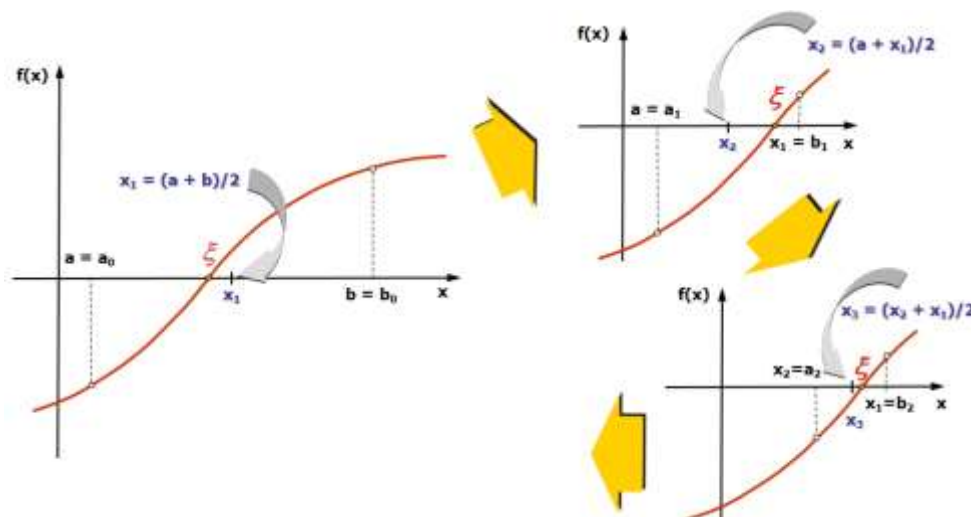
$$|b_k - a_k| < \varepsilon \quad (17)$$

Onde:

$\varepsilon$  - Tolerância para convergência

A referência [9] apresenta uma sequência gráfica para facilitar a visualização do caminhamento de  $x$  até a solução numérica do problema. Essa representação gráfica é apresentada na Figura 2.

#### **Figura 2-Caminhamento de $x$ pelo método da Bisseção**



Fonte: [9]

A referência [9] cita uma série de vantagens e desvantagens para o método da bisseção, são elas:

#### Vantagens

- Facilidade de implementação;
- Estabilidade e convergência para a solução procurada;
- Desempenho regular e previsível.

#### Desvantagens

- Lentidão do processo de convergência (requer o cálculo de  $f(x)$  em um elevado número de iterações);
- Necessidade de conhecimento prévio da região na qual se encontra a raiz de interesse (o que nem sempre é possível);
- Complexidade da extensão do método para problemas multivariáveis.

A referência [9] ainda cita o número de iterações aproximados para a convergência do método da Bisseção. Esse número aproximado é dado pela equação (18).

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} \quad (18)$$

Onde:

$n$  - Número aproximado de iterações

### Método da Falsa Posição

Como o método da Bisseção, este método trabalha com redução de intervalos. Porém o método da Falsa Posição trabalha com reduções de média aritmética do intervalo, sendo que os pesos da média aritmética são dados em função de  $f(a_k)$  e  $f(b_k)$ .

O processo consiste em avaliar um novo  $x$  conforme a descrição da equação (19) e (20).

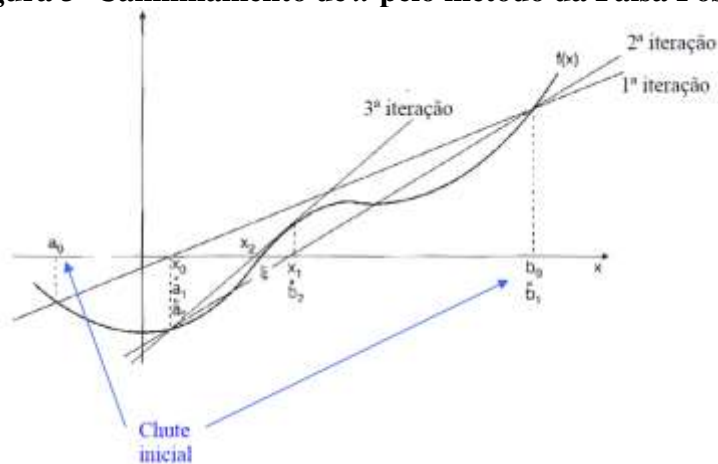
$$x_0 = \frac{a_0 \cdot f(b_0) - b_0 \cdot f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} \Rightarrow \begin{cases} f(a_0) < 0 \\ f(b_0) < 0 \\ f(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi \in (a_0, x_0) \\ a_1 = a_0 \\ b_1 = x_0 \end{cases} \quad (19)$$

$$x_1 = \frac{a_1 \cdot f(b_1) - b_1 \cdot f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} \Rightarrow \begin{cases} f(a_1) < 0 \\ f(b_1) > 0 \\ f(x_1) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi \in (x_1, b_1) \\ a_2 = x_1 \\ b_2 = b_1 \end{cases} \quad (20)$$

O método da Falsa Posição segue o mesmo critério de parada apresentado na equação (17).

Da mesma forma que no processo da Bisseção [6] apresenta o caminhamento gráfico do método da Falsa Posição. Na Figura 3 é apresentado o caminhamento gráfico de  $x$ .

**Figura 3- Caminhamento de  $x$  pelo método da Falsa Posição**



Fonte: [6]

A referência [9] cita uma série de vantagens e desvantagens para o método da Falsa Posição, são elas:

#### Vantagens

- Estabilidade e convergência para a solução procurada;

- Desempenho regular e previsível;
- Cálculos mais simples que o método de Newton.

### Desvantagens

- Lentidão do processo de convergência (requer o cálculo de  $f(x)$  em um elevado número de iterações);
- Necessidade de conhecimento prévio da região na qual se encontra a raiz de interesse (o que nem sempre é possível).

### Método de Newton Raphson

O processo de Newton Raphson consiste em determinar as raízes de uma função através de um processo iterativo que depende das informações das derivadas da função. A equação (21) apresenta a equação de Newton Raphson para solução de raízes de funções unidimensionais.

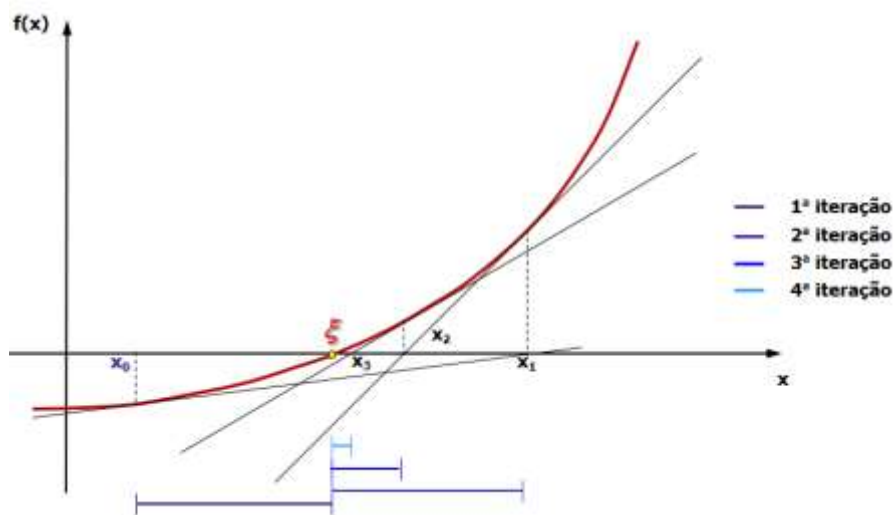
$$X_{n+1} = \varphi(X_n) \quad (21)$$

Onde a função  $\varphi(X_n)$  é a função de iteração, sendo explicitada na forma da equação (22).

$$\varphi(X_n) = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)} \quad (22)$$

Para representação do caminhamento da solução  $x$  [9] apresenta a Figura 4.

**Figura 4- Caminhamento de  $x$  pelo método de Newton Raphson**



Fonte: [9]

A referência [9] também cita uma série de vantagens e desvantagens do método de Newton Raphson que são citadas logo abaixo:

### **Vantagens**

- Rapidez processo de convergência;
- Desempenho elevado.

### **Desvantagens**

- Necessidade da obtenção de  $f'(x)$ , o que pode ser impossível em determinados casos;
- O cálculo do valor numérico de  $f'(x)$  a cada iteração;
- Difícil implementação.

## **METODOLOGIA**

O trabalho consiste em testar modelos numéricos de otimização irrestritas e solução de raízes para encontrar o ponto ótimo de funções de várias variáveis. As funções modelo para efetuar os testes são dadas pelas equações (23) e (24).

$$f(x_1, x_2) = 12.x_1^2 - 12.x_1.x_2 + 4.x_2^2 + 2.x_1 \quad (23)$$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 3.x_1.x_2 + 4.x_2^2 + x_1 - x_2 \quad (24)$$

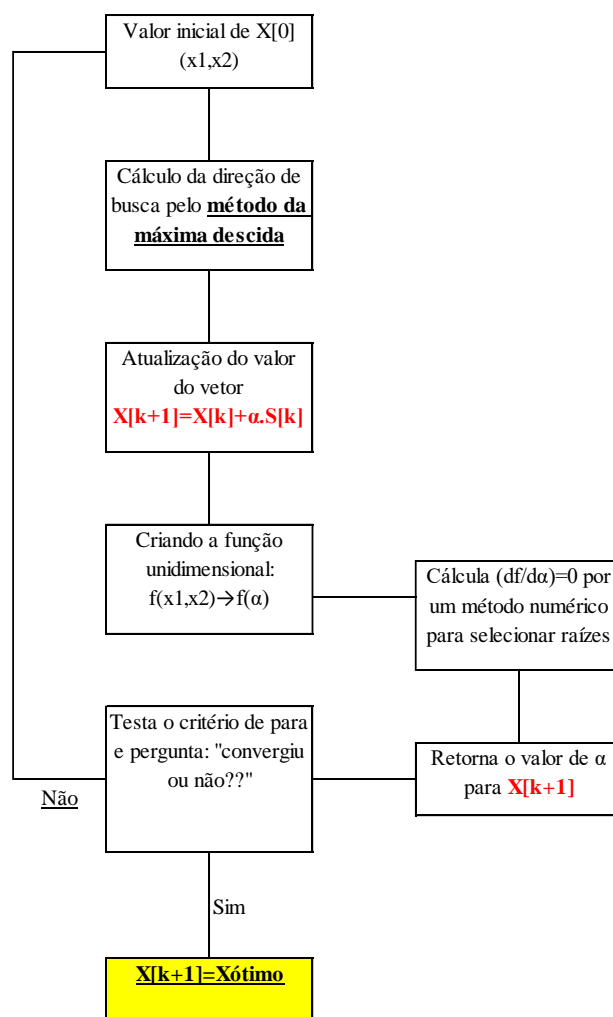
O processo consiste em avaliar o valor de  $X$  a cada iteração, sendo que  $k$  é o número de iterações que varia de  $k = 1 \dots n$ . Todo o processo de atualização de  $X$  deu a origem a uma equação unidimensional  $f(\alpha)$ , onde foi aplicado os conceitos de cálculo integral e diferencial para encontrar o valor de  $\alpha$  que minimiza a função unidimensional. Nessa etapa do desenvolvimento o valor de  $\alpha$  foi avaliado através de métodos numéricos para determinação de raízes de funções (Método da Bissecção, Método da Falsa Posição, Método de Newton Raphson). De posse do valor  $\alpha$   $X[k+1]$  foi atualizado e todo processo foi repetido até que a convergência fosse alcançada. Para a convergência dos métodos foi tomado como padrão o critério de parada do gradiente da função objetivo, conforme equação (25) e (26).

$$\xi = |\nabla f(X_{k+1})| \quad (25)$$

$$\xi \begin{cases} \text{Se } \xi > \text{Tolerância} - \text{O Processo iterativo continua} \\ \text{Se } \xi \leq \text{Tolerância} - \text{O Processo iterativo finaliza} \end{cases} \quad (26)$$

De maneira geral o processo de otimização irrestrita seguirá o fluxo apresentado na Figura 5.

**Figura 5-Fluxograma para aplicação do método numérico**



### Fonte: Próprio Autor

Toda a rotina apresentada nesse artigo foi implementada no software Matlab R2010®. Desde a rotina de otimização irrestrita como a rotina de zero de funções. Os padrões utilizados para os testes foram:

1. Método de Newton (Otimização Irrestrita) e Método de Newton Raphson (Método para o passo da função unidimensional);
2. Método de Newton (Otimização Irrestrita) e Método da Bisseção (Método para o passo da função unidimensional);
3. Método de Newton (Otimização Irrestrita) e Método da Falsa Posição (Método para o passo da função unidimensional);
4. Método da Máxima Descida (Otimização Irrestrita) e Método de Newton Raphson (Método para o passo da função unidimensional);
5. Método da Máxima Descida (Otimização Irrestrita) e Método da Bisseção (Método para o passo da função unidimensional);
6. Método da Máxima Descida (Otimização Irrestrita) e Método da Falsa Posição (Método para o passo da função unidimensional).

Para o método de otimização irrestrito foi previsto em todos testes um número máximo de iterações de 200 iterações. Após esse número de iterações é visível que o processo não atingirá a convergência e deve ser interrompido. A tolerância do processo iterativo da otimização irrestrita foi de  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

Para os métodos numéricos de solução de raízes de funções foi adotado uma tolerância  $\varepsilon = 10^{-6}$  também. Para esses métodos numéricos o valor de iterações foi fixado também em 200 iterações.

Como todo o processo admite o cálculo da derivada da função unidimensional igual a zero devido a atualização de  $X$  no problema geral de otimização (Ver equação 6 e Figura 5) o valor de  $\alpha$ , também chamado de *passo*, terá sua busca iniciada em um intervalo de incerteza entre -2 e 2 para o método da Bisseção e Falsa Posição e para o método de Newton Raphson o valor será iniciado em 0.

O controle dos métodos será realizado pelo número de iterações totais e também como parte de análise será verificado o tempo total de convergência para cada método utilizado. Sendo que esses resultados serão apresentados de forma gráfica e em formato de tabelas.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção serão apresentados os resultados e análises realizadas de acordo com as descrições da metodologia.

Análise da equação (23)

A Tabela 1 apresenta os resultados para o problema da equação (23). Foi considerado como o ponto inicial  $x = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$ .

**Tabela 1-Resultados para o problema 23**

Nº iterações da otimização	x1-inicial	x2-inicial	x1-final	x2-final	Combinação utilizada	Tempo do método de otimização (s)
1,00	2,00	2,00	-0,333333	-0,500000	NEW+NEWRAP	1,11
2,00	2,00	2,00	-0,333333	-0,500000	NEW+BISSEC	0,92
1,00	2,00	2,00	-0,333333	-0,500000	NEW+FALPOS	0,69
33	2,00	2,00	-0,333333	-0,500000	MAXD+NEWRAP	3,112
33	2,00	2,00	-0,333333	-0,500000	MAXD+BISSEC	6,722
----	2,00	2,00	----	----	MAXD+FALPOS	----

É possível perceber que o método de otimização de 2º ordem de Newton é o que apresenta a convergência mais rápida e com menor número de iterações. Isso se deve ao fato de que a convergência do método é quadrática, enquanto o método de máxima descida apresenta convergência linear. Analisando agora o fato do tempo de convergência do método é visível que a maneira que se calcula o passo da função unidimensional influencia o tempo total da rotina. O fato da rotina que combina NEW+NEWRAP apresentar um tempo maior pode ser devido ao fato do modelo utilizar informação da derivada da função passo enquanto os outros métodos trabalham com reduções sucessivas de intervalo sem necessitar do uso de derivadas, que tem um alto custo computacional. De maneira geral o método acoplado de NEW+FALPOS apresentou um menor tempo de convergência em relação a NEW+BISSEC, fato o qual já era esperado visto que o método da Bisseção trabalha com reduções iguais a média aritmética



enquanto a Falsa Posição trabalha com reduções da média ponderada, conforme visto no referencial teórico desse trabalho.

Um caso interessante de ser avaliado é a combinação MAXD+FALPOS que alcançou o número máximo de iterações e não apresentou convergência no problema citado.

### Análise da equação (24)

A Tabela 2 apresenta os resultados para o problema da equação (24). Foi considerado como o ponto inicial  $x = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$ .

**Tabela 2-Resultados para o problema 24**

Nº iterações da otimização	x1-inicial	x2-inicial	x1-final	x2-final	Combinação utilizada	Tempo do método de otimização (s)
1,00	2,00	2,00	-0,714286	-0,142857	NEW+NEWRAP	0,69
2,00	2,00	2,00	-0,714286	-0,142857	NEW+BISSEC	0,58
-----	2,00	2,00	-----	-----	NEW+FALPOS	-----
37	2,00	2,00	-0,714285	-0,142857	MAXD+NEWRAP	2,347
37	2,00	2,00	-0,714285	-0,142857	MAXD+BISSEC	7,342
----	2,00	2,00	----	----	MAXD+FALPOS	----

É visível analisando a Tabela 2 que o padrão de respostas de tempo e número de iterações é semelhante aos exemplos analisados anteriormente, até pelo formato da equação (24) ser semelhante ao formato da equação (23). Um fato importante de ser ressaltado é que para esse exemplo o método acoplado com a Falsa Posição não convergiu dentro do número de iterações máximas para nenhum dos métodos de otimização.

## CONCLUSÃO

Dentro do objetivo inicial desse estudo o mesmo cumpriu o esperado que era de avaliar métodos de otimização de 1º ordem e 2º ordem que nesse caso são os métodos da Máxima Descida e o Newton.

Sobre o custo computacional é visível que os métodos de otimização que dependem do cálculo de derivadas elevam o custo computacional, porém em contrapartida reduzem bruscamente o número de iterações. Outro fator bastante chamativo é que a máxima descida possui convergência bastante lenta quando comparada a um método de segunda ordem de Newton, o aumento chega a ser de 30 vezes para os exemplos testados.

Outro fator bastante relevante é o ponto de partida da variável de projeto. Durante as simulações pontos de partidas diferentes foram testados como por exemplo  $x = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ . Verificou-se para esse chute inicial que a Máxima Descida reduziu em 10 iterações o seu processo, para o método de Newton não é possível fazer a mesma avaliação, pois o mesmo só apresenta uma iteração para ambos os pontos de partida. Portanto o ponto de partida é bastante relevante no processo de otimização e deve ser estudado com critério antes de ser utilizado.

Como sugestões para trabalhos posteriores seria o teste de métodos Quase-Newton nas mesmas funções verificando qual dos métodos apresentou melhor tempo de convergência.

Outra sugestão seria o teste de funções mais complexas, como funções de terceira ou quarta ordem, verificando os mesmos critérios desse trabalho, como o tempo de convergência e número de iterações do processo de otimização irrestrito.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] VANDERPLAATS, G. N. **Numerical Techniques for engineering design**, 3º ed., Editora: VRR, 1999.

[2] NELI SILVA, E. C. **Otimização aplicada ao projeto de sistemas mecânicos**: Apostila, São Paulo-SP: Departamento de Engenharia Mecatrônica e sistemas mecânicos, Universidade de São Paulo (USP), 20--.

[3] VENKATARAMAN, P. **Applied Optimization with Matlab programming**, 3º ed., Editora: John Wiley & Sons, 2001.

[4] SILVA SOBRAL, E; PERIÇARO, G. A.; DOS SANTOS, S. R. VII Encontro de produção científica e tecnológica: Ética na pesquisa científica. **Otimização irrestrita: um estudo sobre o método de Cauchy**: Campo Mourão-PR, out. 2012.

[5] SECCHI, A. R. **Otimização de processos**: Apostila, Porto Alegre-RS: Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), 2005.

[6] PILLING, S. **Cálculo Numérico**: Apostila. São José dos Campos-SP: Faculdade de Engenharia, Arquiteturas e Urbanismo, Universidade do Vale do Paraíba (UNIVAP), 20--.

[7] DE QUADROS, R. S.; DE BORTOLI, A. L. **Fundamentos de Cálculo Numérico para engenheiros:** Apostila. Porto Alegre-RS: Departamento de matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), 2009.

[8] CASTILHO, J. E. **Cálculo Numérico:** Apostila. Uberlândia-MG: Faculdade de matemática, Universidade Federal de Uberlândia (UFU), 2001.

[9] NÓBREGA QUEIROZ, B. C.; RANGEL DE QUEIROZ, J. E.; BARROS, M. A. **Notas de aula de cálculo numérico:** Apostila. Campina Grande-MG: Departamento de Sistemas e Computação, Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), 2009.

Recebido em 19 de agosto de 2016.

Aprovado em 28 de setembro de 2016.